第一章． 波动方程

§1 方程的导出。定解条件

1．细杆（或弹簧）受某种外界原因而产生纵向振动，以 u(x,t)表示静止时在 x 点处的点在时刻 t 离开原来位置的偏移，假设振动过程发生的张力服从虎克定律，试证明$u(x,t)$满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

其中ρ为杆的密度，E为杨氏模量。

证：在杆上任取一段，其中两端于静止时的坐标分别为 x 与 $x+\Delta x$。现在计算这段杆在时刻t的相对伸长。在时刻t这段杆两端的坐标分别为：

$$x+u(x,t);x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$$

其相对伸长等于 $$\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)]-[x+u(x,t)]-\Delta x}{\Delta x}=u_x(x+\theta\Delta x,t)$$

令 $\Delta x\to 0$，取极限得在点x的相对伸长为$u_x(x,t)$。由虎克定律，张力$T(x,t)$等于

$$T(x,t)=E(x)u_X(x,t)$$

其中$E(x)$是在点x的杨氏模量。

设杆的横截面面积为$S(x)$,则作用在杆段$(x,x+\Delta x)$两端的力分别为

$$E(x)S(x)u_x(x,t);E(x+\Delta x)S(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t).$$

于是得运动方程 $\rho(x)s(x)\cdot\Delta x\cdot u_{tt}(x,t)=ESu_x(x+\Delta x)|_{x+\Delta x}-ESu_X(x)|_X$

利用微分中值定理，消去Δx，再令$\Delta x\to 0$得

$$\rho(x)s(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}(ESu_x)$$

若$s(x)=$常量，则得

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(E(x)\frac{\partial u}{\partial x})$$

即得所证。

2．在杆纵向振动时，假设(1)端点固定，(2)端点自由， (3)端点固定在弹性支承上，试分别导出这三种情况下所对应的边界条件。

解：(1)杆的两端被固定在$x=0,x=l$两点则相应的边界条件为

$u(0,t)=0, u(l,t)=0.$

(2)若 $x=l$ 为自由端，则杆在 $x=l$ 的张力 $T(l,t)=E(x)\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}$ 等于零，因此相应的边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0$

同理，若 $x=0$ 为自由端，则相应的边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0$

(3)若 $x=l$ 端固定在弹性支承上，而弹性支承固定于某点，且该点离开原来位置的偏移由函数 $v(t)$ 给出，则在 $x=l$ 端支承的伸长为 $u(l,t)-v(t)$。由虎克定律有

$$E\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=-k[u(l,t)-v(t)]$$

其中 k 为支承的刚度系数。由此得边界条件

$$(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u)|_{x=l}=f(t) \quad 其中\sigma=\frac{k}{E}$$

特别地，若支承固定于一定点上，则 $v(t)=0,$ 得边界条件

$$(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u)|_{x=l}=0。$$

同理，若 $x=0$ 端固定在弹性支承上，则得边界条件

$$E\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=k[u(0,t)-v(t)]$$

即 $$(\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma u)|_{x=0}-f(t).$$

3. 试证：圆锥形枢轴的纵振动方程为 $E\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]=\rho(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

其中 h 为圆锥的高(如图 1)

证：如图，不妨设枢轴底面的半径为 1，则 x 点处截面的半径 l 为：

$$l=1-\frac{x}{h}$$

所以截面积 $s(x)=\pi(1-\frac{x}{h})^2$。利用第 1 题，得

$$\rho(x)\pi(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}[E\pi(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]$$

若 $E(x)=E$ 为常量，则得

$$E\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]=\rho(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

4. 绝对柔软逐条而均匀的弦线有一端固定，在它本身重力作用下，此线处于铅垂平衡

位置，试导出此线的微小横振动方程。

解：如图 2，设弦长为l，弦的线密度为ρ，则x点处的张力$T(x)$为

$$T(x)=\rho g(l-x)$$

且$T(x)$的方向总是沿着弦在x点处的切线方向。仍以$u(x,t)$表示弦上各点在时刻t沿垂直于x轴方向的位移，取弦段$(x,x+\Delta x),$则弦段两端张力在u轴方向的投影分别为

$$\rho g(l-x)\sin\theta(x);\rho g(l-(x+\Delta x))\sin\theta(x+\Delta x)$$

其中$\theta(x)$表示$T(x)$方向与x轴的夹角

又 $$\sin\theta\approx tg\theta=\frac{\partial u}{\partial x.}$$

于是得运动方程

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[l-(x+\Delta x)]\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x+\Delta x}\rho g-[l-x]\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x}\rho g$$

利用微分中值定理，消去Δx，再令$\Delta x\to 0$得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}]。$$

5．验证 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$在锥$t^2-x^2-y^2>0$中都满足波动方程

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 证：函数$u(x,y,t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$在锥$t^2-x^2-y^2>0$ 内对变量

x,y,t有

二阶连续偏导数。且 $$\frac{\partial u}{\partial t}=-(t^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(t^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}+3(t^2-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot t^2$$

$$=(t^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2t^2+x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(t^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(t^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3\left(t^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}x^2$$

$$=\left(t^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(t^2+2x^2-y^2\right)$$

同理 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(t^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(t^2-x^2+2y^2\right)$$

所以 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(t^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(2t^2+x^2+y^2\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

即得所证。

6. 在单性杆纵振动时,若考虑摩阻的影响,并设摩阻力密度涵数(即单位质量所受的摩阻力)与杆件在该点的速度大小成正比(比例系数设为 b), 但方向相反,试导出这时位移函数所满足的微分方程.

解: 利用第 1 题的推导,由题意知此时尚须考虑杆段 $(x,x+\Delta x)$ 上所受的摩阻力.由题设,单位质量所受摩阻力为 $-b\frac{\partial u}{\partial t}$,故 $(x,x+\Delta x)$ 上所受摩阻力为

$$-b\cdot p(x)s(x)\cdot\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}$$

运动方程为:

$$\rho(x)s(x)\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=ES\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x+\Delta x}-ES\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x-b\cdot\rho(x)s(x)\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}$$

利用微分中值定理，消去 Δx ,再令 $\Delta x\to 0$ 得

$$\rho(x)s(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right)-b\rho(x)s(x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

若 $s(x)=$ 常数，则得

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)-b\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

若 $\rho(x)=\rho$ 是常量, $E(x)=E$ 也是常量.令 $a^2=\frac{E}{\rho}$,则得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

§2 达朗贝尔公式、 波的传播

1. 证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(h\succ 0\text{常数}\right)$$

的通解可以写成

$$u=\frac{\overline{F}(x-at)+\overline{G}(x+at)}{h-x}$$

其中 F,G 为任意的单变量可微函数,并由此求解它的初值问题:

$$t=0:u=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial t}=\Psi(x).$$

解：令 $(h-x)u=v$ 则

$$(h-x)\frac{\partial u}{\partial x}=u+\frac{\partial v}{\partial x},(h-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}=(h-x)\left(u+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(h-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}=-(u+\frac{\partial v}{\partial x})+(h-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(h-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}=(h-x)(u+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x})$$

又 $$(h-x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

代入原方程，得

$$(h-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}(h-x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

即 $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

由波动方程通解表达式得

$$v(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$$

所以 $$u=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{(h-x)}$$

为原方程的通解。

由初始条件得

$$\varphi(x)=\frac{1}{h-x}[F(x)+G(x)] \qquad (1)$$

$$\psi(x)=\frac{1}{h-x}\left[-aF'(x)+aG'(x)\right]$$

所以 $$F(x)-G(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(\alpha-h)\psi(\alpha)d\alpha+c \qquad (2)$$

由 (1), (2) 两式解出

$$F(x)=\frac{1}{2}(h-x)\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x}(\alpha-h)\psi(\alpha)d\alpha+\frac{c}{2}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}(h-x)\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x}(\alpha-h)\psi(\alpha)d\alpha+\frac{c}{2}$$

所以 $$u(x,t)=\frac{1}{2(h-x)}[(h-x+at)\varphi(x-at)+(h-x-at)\varphi(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a(h-x)}\int_{x-at}^{x+at}(h-\alpha)\psi(\alpha)d\alpha.$$

即为初值问题的解散。

2．问初始条件 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足怎样的条件时，齐次波动方程初值问题的解仅由右传播波组成？

解：波动方程的通解为

u=F(x-at)+G(x+at)

其中 F，G 由初始条件 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 决定。初值问题的解仅由右传播组成，必须且只须对于任何 x, t 有 G(x+at)≡常数.

即对任何 x, G(x)≡C_0

又 $$G（x）=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha-\frac{C}{2a}$$

所以 $\varphi(x),\psi(x)$ 应满足

$$\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha=C_1 \text{（常数）}$$

或 $$\varphi'(x)+\frac{1}{a}\psi(x)=0$$

3.利用传播波法，求解波动方程的特征问题（又称古尔沙问题）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\big|_{x-at=0}=\varphi(x) \\ u\big|_{x+at=0}=\psi(x).\end{cases} \qquad (\varphi(0)=\psi(0))$$

解：u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)

令 x-at=0 得 $\varphi(x)$=F（0）+G（2x）

令 x+at=0 得 $\psi(x)$=F（2x）+G(0)

所以 F(x)=$\psi(\frac{x}{2})$-G(0).

G（x）=$\varphi(\frac{x}{2})$-F(0).

且 F（0）+G(0)=$\varphi(0)=\psi(0)$.

所以 u(x,t)=$\varphi(\frac{x+at}{2})+\psi(\frac{x-at}{2})-\varphi(0)$.

即为古尔沙问题的解。

4．对非齐次波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \quad (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ t=0,u=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

证明：

（1） 如果初始条件在 x 轴的区间[x_1,x_2]上发生变化，那末对应的解在区间[x_1，x_2]的影响区域以外不发生变化；

（2） 在 x 轴区间[x_1,x_2]上所给的初始条件唯一地确定区间[x_1,x_2]的决定区域中解的数值。

证：（1） 非齐次方程初值问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

当初始条件发生变化时，仅仅引起以上表达式的前两项发生变化，即仅仅影响到相应齐次方程初值的解。

当$\varphi(x)$, $\psi(x)$在[$x_{1,}x_2$]上发生变化，若对任何 t>0,有 x+at<x_1或 x-at>x_2,则区间[x-at,x+at]整个落在区间[$x_{1,}x_2$]之外，由解的表达式知 u(x,t)不发生变化，即对 t>0,当 x<x_1-at 或 x>x_2+at,也就是（x,t）落在区间[x_1,x_2]的影响域

$$x_t-at\le x\le x_2+at \quad (t>0)$$

之外，解 u(x,t)不发生变化。 （1）得证。

(2). 区间[x_1, x_2]的决定区域为 $t>0, x_1+at\le x\le x_2-at$

在其中任给（x,t）,则

$$x_1\le x-at<x+at\le x_2$$

故区间[x-at,x+at]完全落在区间[x_1, x_2]中。因此[x_1, x_2]上所给的初给

条件 $\varphi(x), \beta\psi(x)$ 代入达朗贝尔公式唯一地确定出 u(x,t)的数值。

5. 若电报方程

$$u_{xx}=CLu_{tt}+(CR+LG)u_t+GRu$$

$(C,L,R,G\text{为常数})$具体形如

$$u(x,t)=\mu(t)f(x-at)$$

的解（称为阻碍尼波），问此时 C,L,R,G 之间应成立什么关系？

解 $$u(x,t)=\mu(t)f(x-at)$$

$$u_{xx}=\mu(t)f''(x-at)$$

$$u_t=\mu'(t)f(x-at)-a\mu(t)f'(x-at)$$

$$u_{tt}=\mu''(t)f(x-at)-2a\mu'(t)f'(x-at)+a^2\mu(t)f''(x-at)$$

代入方程，得

$$\begin{aligned}&(CLa^2-1)\mu(t)f''(x-at)-(2aCL\mu'(t)+a(CR+LG)\mu(t))f'(x-at)\\&+(CL\mu''(t)+(CR+LG)\mu'(t)+GR\mu(t))+GR\mu(t)f(x-at)=0\end{aligned}$$

由于 f 是任意函数，故 f, f', f'' 的系数必需恒为零。即

$$\begin{cases}CLa^2-1=0\\2CL\mu'(t)+(CR+LG)\mu(t)=0\\CL\mu''(t)+(CR+LG)\mu'(t)+GR\mu(t)=0\end{cases}$$

于是得 $$CL=\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{u'(t)}{u(t)}=-\frac{a^2}{2}(CR+LG)$$

所以 $$u(t)=c_0e^{-\frac{a^2}{2}(CR+LG)t}$$

代入以上方程组中最后一个方程，得

$$CL\cdot\frac{a^4}{4}(CR+LG)^2-\frac{a^2}{2}(CR+LG)^2+GR\equiv 0$$

又 $a^2=\dfrac{1}{CL}$,得$\dfrac{1}{4}(CR+LG)^2=GRCL$

即 $(CR-LG)^2=0$

最后得到 $\dfrac{C}{L}=\dfrac{G}{R}$

6．利用波的反射法求解一端固定并伸长到无穷远处的弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=0\psi(x)(0<x<\infty) \\ u(0,t)=0(t\ge 0)\end{cases}$$

解：满足方程及初始条件的解，由达朗贝尔公式给出：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\text{。}$$

由题意知$\varphi(x),\psi(x)$仅在$0<x<\infty$上给出，为利用达朗贝尔解，必须将$\varphi(x),\psi(x)$开拓到$-\infty<x<0$上，为此利用边值条件，得

$$0=\frac{1}{2}(\varphi(at)+\varphi(at))+\int_{-at}^{at}\psi(\alpha)d\alpha\text{。}$$

因此对任何t必须有

$$\varphi(at)=-\varphi(-at)$$

$$\int_{-at}^{at}\psi(\alpha)d\alpha=0$$

即$\varphi(x),\psi(x)$必须接奇函数开拓到$-\infty<x<0$上，记开拓后的函数为$\Phi(x),\Psi(x)$；

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0 \\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0 \\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, & t<\frac{x}{a}, x>0\\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right)+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, & t>\frac{x}{a}, x>0\end{cases}$$ 。

7．求方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ 形如 $u=f(r,t)$ 的解（称为球面波）其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

解：

$$u=f(r,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{r}{x}$$

、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3})]$$

即 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}+\frac{\partial u}{\partial r})$$

令 $ru=v$，则

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, r\frac{\partial u}{\partial r}+u=\frac{\partial v}{\partial r}，\ r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

代入方程，得 v 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

故得通解 $$v(r,t)=F(r-at)+G(r+at)$$

所以 $$u=\frac{1}{r}[F(r-at)+G(r+at)$$

8．求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\sin x\\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

解：由非齐次方程初值问题解的公式得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\alpha d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin\xi d\xi d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos(x+t)-\cos(x-t)]-\frac{1}{2}\int_0^t\tau[\cos(x+(t-\tau))-\cos(x-(t-\tau))]d\tau$$

$$=\sin x\sin t+\sin x\int_0^t\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=\sin x\sin t+\sin x[\tau\cos(t-\tau)+\sin(t-\tau)]_0^t$$

$$=t\sin x$$

即 $u(x,t)=t\sin x$ 为所求的解。

9．求解波动方程的初值问题。

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+\dfrac{tx}{(1+x^2)^2}\\ u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=\dfrac{1}{1+x^2}\end{cases}$$

解： $$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha+\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{\xi\tau}{(1+\xi^2)^2}d\xi d\tau$$

$$\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=arctg(x+at)-arctg(x-at)$$

$$\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{\xi\tau}{(1+\xi^2)^2}d\xi d\tau=\int_0^t\tau[\frac{-1}{2(1+\xi^2)}]_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\frac{\tau}{1+(x+a(t-\tau)^2}-\frac{\tau}{1+(x+a(t-\tau))^2}]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x}-\frac{x-at-u}{a^2(1+u^2)}du+\frac{1}{2}\int_{x+at}^{x}\frac{x+at-u}{a^2(1+u^2)}du$$

$$=\frac{-1}{2a^2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{x-u}{1+u^2}du+\frac{t}{za}\int_{x-at}^{x}\frac{du}{1+u^2}+\frac{t}{2a}\int_{x+at}^{x}\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{x}{2a^2}(arctg(x-at)-arctg(x+at))+\frac{1}{4a^2}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$$

$$+\frac{t}{2a}[2arctgx-arctg(x-at)-arctg(x+at)]$$

$$=\frac{1}{2a^2}(x-at)arctg(x-at)-\frac{1}{2a^2}(x+at)arctg(x+at)$$

$$+\frac{t}{a}arctgx+\frac{1}{4a^2}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{4a^3}\{(x-at-2a^2)arctg(x-at)-(x+at-2a^2)\cdot$$

$$\cdot arctg(x+at)+2atarctgx+\frac{1}{2}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}\}$$

§3 混合问题的分离变量法

1. 用分离变量法求下列问题的解：

(1)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\Big|_{t=0}=\sin\dfrac{3\pi x}{l},\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=x(1-x)\quad(0<x<l)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

解：边界条件齐次的且是第一类的，令

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

得固有函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$，且

$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t$，$(n=1,2\cdots)$

于是 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

今由始值确定常数 A_n 及 B_n，由始值得

$$\sin\frac{3\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$x(l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所以 $A_3=1,\ A_n=0,$ 当 $n\neq 3$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{2}{an\pi}\left\{l\left(-\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)+\left(\frac{l}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi}{l}x\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2l^2x}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{2l^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\ \right)\right\}_0^l=\frac{4l^3}{an^4\pi^4}(1-(-1)^n)$$

因此所求解为

$$u(x,t)=\cos\frac{3a\pi}{l}t\sin\frac{3\pi}{l}x+\frac{4l^3}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}\sin\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

(2)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\\ u(0,t)=0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0\\ u(x,0)=\dfrac{h}{l}x, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\end{cases}$$

解：边界条件齐次的，令

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

得：
$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0, \qquad X'(l)=0\end{cases} \qquad (1)$$

及 $$T''+a^2\lambda X=0 \qquad (2)。$$

求问题(1)的非平凡解，分以下三种情形讨论。

1° $\lambda<0$时，方程的通解为

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由 $X(0)=0$ 得 $c_1+c_2=0$

由 $X'(l)=0$ 得 $C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$

解以上方程组，得 $C_1=0$，$C_2=0$，故 $\lambda<0$ 时得不到非零解。

2° $\lambda = 0$时，方程的通解为$X(x) = c_1 + c_2 x$

由边值$X(0) = 0$得$c_1 = 0$，再由$X'(l) = 0$得$c_2 = 0$，仍得不到非零解。

3° $\lambda > 0$时，方程的通解为

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

由$X(0) = 0$得$c_1 = 0$，再由$X'(l) = 0$得

$$c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

为了使$c_2 \neq 0$，必须 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$，于是

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 \qquad (n = 0,1,2\cdots)$$

且相应地得到$X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$ $\qquad (n = 0,1,2\cdots)$

将λ代入方程(2)，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n \sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t \qquad (n = 0,1,2\cdots)$$

于是

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n \sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

再由始值得

$$\begin{cases} \frac{h}{l}x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x \\ 0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2l}a\pi B_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x \end{cases}$$

容易验证$\left\{\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\right\}$ $(n = 0,1,2\cdots)$构成区间$[0,l]$上的正交函数系：

$$\int_0^l \sin\frac{2m+1}{2l}\pi x \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x dx = \begin{cases} 0 & \text{当} m \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{当} m = n \end{cases}$$

利用$\left\{\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\right\}$正交性，得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{h}{l}x \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x dx$$

$$=\frac{2h}{l^2}\left\{-\frac{2l}{(2n+1)\pi}x\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x+\left(\frac{2l}{(2n+1)\pi}\right)^2\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\right\}_0^l$$

$$=\frac{8h}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^n$$

$$B_n=0$$

所以 $$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

2。设弹簧一端固定，一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题归结为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=A\sin\omega t\\ u(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\end{cases}$$ 求解此问题。

解：边值条件是非齐次的，首先将边值条件齐次化，取 $U(x,t)=\frac{A}{l}x\sin\omega t$，则 $U(x,t)$ 满足

$$U(0,t)=0,\quad U(l,t)=A\sin\omega t$$

令 $u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$ 代入原定解问题，则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{A\omega^2}{l}x\sin\omega t\\ v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0\\ v(x,0)=0 \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=-\dfrac{A\omega}{l}x\end{cases} \tag{1}$$

$v(x,t)$ 满足第一类齐次边界条件，其相应固有函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$，$(n=0,1,2\cdots)$

故设 $$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{2}$$

将方程中非齐次项 $\frac{A\omega^2}{l}x\sin\omega t$ 及初始条件中 $-\frac{A\omega}{l}x$ 按 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 展成级数，得

$$\frac{A\omega^2}{l}x\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{A\omega^2}{l}x\sin\omega t\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{2A\omega^2}{l^2}\sin\omega t\left\{-\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_0^l$$

$$=\frac{2A\omega^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\omega t-\frac{A\omega}{l}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $$\psi_n=\frac{-2}{l}\int_0^l\frac{A\omega^2}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2A\omega}{n\pi}(-1)^n$$

将(2)代入问题(1)，得 $T_n(t)$ 满足 $$\begin{cases}T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2A\omega^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\omega t\\ T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=\frac{2A\omega}{n\pi}(-1)^n\end{cases}$$

解方程，得通解 $$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{2A\varpi^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin\varpi t}{(\frac{an\pi}{l})^2-\varpi^2}$$

由始值，得 $A_n=0$

$$B_n=\frac{1}{an\pi}\{(-1)^n\frac{2A\varpi}{n\pi}-\frac{(-1)^{n+1}2A\varpi^3l^2}{n\pi((an\pi)^2-\varpi^2l^2)}\}=\frac{(-1)^n2A\varpi al}{(an\pi)^2-\varpi^2l^2}$$

所以 $$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^n2A\varpi al}{(an\pi)^2-(\varpi l)^2}\sin\frac{an\pi}{l}t$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}2A\varpi^2l^2}{(an\pi)^2-(\varpi l)^2}\cdot\frac{1}{n\pi}\sin\varpi t\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=2A\varpi l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{(an\pi)^2-(\varpi l)^2}\{a\sin\frac{an\pi}{l}t-\frac{\varpi l}{n\pi}\sin\varpi t\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

因此所求解为

$$u(x,t)=\frac{A}{l}x\sin\varpi t+2A\varpi l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{(an\pi)^2-(\varpi l)^2}$$

$$\times\{a\sin\frac{an\pi}{l}t-\frac{\varpi l}{nt}\sin\varpi t\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

3．用分离变量法求下面问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bshx\\ u|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\end{cases}$$

解：边界条件是齐次的，相应的固有函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

设 $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将非次项$bshx$按$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$展开级数，得

$$bshx=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $$f_n(t)=\frac{2b}{l}\int_0^l shx\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2+l^2}2bn\pi shl$$

将 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$代入原定解问题，得$T_n(t)$满足

$$\begin{cases}T_n''(t)+(\dfrac{an\pi}{l})^2T_n(t)=(-1)^{n+1}\dfrac{2bn\pi}{n^2\pi^2+l^2}shl\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0\end{cases}$$

方程的通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t+(\frac{l}{an\pi})^2\cdot\frac{2bn\pi}{n^2\pi^2+l^2}(-1)^{n+1}shl$$

由$T_n(0)=0$，得：$A_n=-(\frac{l}{an\pi})^2\frac{2bn\pi}{n^2\pi^2+l^2}(-1)^{n+1}shl$

由$T_n'(0)=0$，得$B_n=0$

所以 $$T_n(t)=(\frac{1}{an\pi})^2\frac{2bn\pi}{n^2\pi^2+l^2}(-1)^{n+1}shl(1-\cos\frac{an\pi}{l}t)$$

所求解为

$$u(x,t)=\frac{2bl^2}{a^2\pi}shl\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2+l^2)}(1-\cos\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

4．用分离变量法求下面问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (b>0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{h}{l}x, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：方程和边界条件都是齐次的。令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入方程及边界条件，得

$$\frac{T'' + 2bT'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

由此得边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

因此得固有值$\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$，相应的固有函数为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1,2,\cdots$$

又$T(t)$满足方程

$$T'' + 2bT' + a^2\lambda T = 0$$

将$\lambda = \lambda_n$代入，相应的$T(t)$记作$T_n(t)$，得$T_n(t)$满足

$$T''_n + 2bT_n' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T = 0$$

一般言之，b很小，即阻尼很小，故通常有

$$b^2 < \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2, n = 1,2,\cdots$$

故得通解 $T_n(t) = e^{-bt}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)$

其中 $\omega_n = \sqrt{\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 - b^2}$

所以

$$u(x,t)=e^{-bt}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

再由始值，得
$$\begin{cases}\dfrac{h}{l}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x\\ 0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-bA_n+B_n\omega_n)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\end{cases}$$

所以

$$A_n=\frac{2h}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2h}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$B_n=\frac{b}{\omega_n}A_n=\frac{2bh}{n\pi\omega_n}(-1)^{n+1}$$

所求解为

$$u(x,t)=\frac{2h}{\pi}e^{-bt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\cos\omega_n t+\frac{b}{\omega_n}\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

§4　高维波动方程的柯西问题

1．利用泊松公式求解波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

的柯西问题
$$\begin{cases}u|_{t=0}=x^3+y^2z\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：泊松公式

$$u=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\phi}{r}ds\right\}+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}ds$$

现　$\psi=0,\phi=x^3+y^2z$

且　$\iint_{s_{at}^M}\frac{\Phi}{r}ds=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta,\varphi)r\sin\theta d\theta d\varphi|_{r=at}$

其中　$\Phi(r,\theta,\varphi)=\Phi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)$

$$=(x+r\sin\theta\cos\varphi)^3+(y+\sin\theta\sin\varphi)^2(z+r\cos\theta)$$

$$=x^3+y^2z+3x^2r\sin\theta\cos\varphi+3xr^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^3\theta\cos^3\varphi$$

$$+2yzr\sin\theta\sin\varphi+rz\sin^2\theta\sin^2\varphi+y^2r\cos\theta$$

$$+2yr^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi+r^3\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta$$

计算 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta,\varphi)r\sin\theta d\theta d\varphi$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(x^3+y^2z)r\sin\theta d\theta d\psi=r(x^3+y^2z)\cdot 2\pi(-\cos\theta)_0^{\pi}$$

$$=4\pi r(x^3+y^2z)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}3x^2r\sin\theta\cos\varphi\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi=3x^2r^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}3xr^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi=3xr^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=3xr^3[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot[\frac{\phi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\phi]_0^{2\pi}$$

$$=4xr^3\pi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^3\sin\theta\cos^3\varphi\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=r^4\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi=4\pi xr^3$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}2yzr\sin\theta\sin\varphi\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi=2yzr^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^2z\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi=rz\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=r^3z[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot[\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi r^3z$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}y^2r\cos\theta\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi=y^2r^2\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}2yr^2\sin\theta coc\theta\sin\varphi\cdot\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=2yr^3\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^3\sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\theta\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=r^4\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=0$$

所以

$$\iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\Phi}{r} ds = [4\pi r(x^2 + y^2 z) + 4\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 z]_{r=at}$$

$$= 4\pi at[x^2 + y^2 z + xa^2 t^2 + \frac{1}{3}a^2 t^2 z]$$

u(x,y,z)= $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\Phi}{r}$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[tx^3 + ty^2 z + xa^2 t^3 + \frac{1}{3}a^2 t^2 z]$$
$$= x^3 + y^2 z + 3a^2 t^2 x + a^2 t^2 z$$

即为所求的解。

2． 试用降维法导出振动方程的达朗贝尔公式。

解：三维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), u_t\big|_{t=0} = \phi(x, y, z) \end{cases}$$

当 u 不依赖于 x,y,即 u=u(z),即得弦振动方程的柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{zz} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(z), u_t\big|_{t=0} = \phi(z) \end{cases}$$

利用泊松公式求解

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi}{r} ds\} + \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi}{r} ds$$

因只与 z 有关，故

$$\iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi}{r} ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi(z + at\cos\varphi)}{at} \cdot (at)^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \varphi(z + at\cos\theta) at\sin\theta d\theta$$

令 z + atcos = α , - atsin d = d α

得 $\iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi}{r} ds = 2\pi \int_{z-at}^{z+at} \varphi(\alpha) d\alpha$

所以

$$u(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\varphi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\phi(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\{\varphi(z+at)+\varphi(z-at)\}+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\phi(\alpha)d\alpha$$

即为达郎贝尔公式。

3. 求解平面波动方程的柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) \\ u|_{t=0}=x^2\left(x+y\right) \qquad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解： 由二维波动方程柯西问题的泊松公式得：

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\sum_{at}^{m}}\frac{\varphi(\zeta,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta\right.$$

$$\left.+\iint_{\sum_{at}^{m}}\frac{\psi(\zeta,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rdrd\theta$$

又 $$\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)=(x+r\cos)^2(x+y+r\cos\theta+r\sin\theta)$$

$$=x^2(x+y)+2x(x+y)r\cos\theta+(x+y)r^2\cos^2\theta$$

$$+x^2r(\cos\theta+\sin\theta)+2xr^2(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta$$

$$+r^3\cos^2\theta(\cos\theta+\sin\theta)$$

因为 $$\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta=0.$$

所以 $$\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rdrd\theta$$

$$=2\pi x^2(x+y)\int_0^{at}\frac{rdr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}+\pi(3x+y)\int_0^{at}\frac{r^3dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}$$

又
$$\int_0^{at}\frac{rdr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}=-\sqrt{a^2t^2-r^2}\ |_0^{at}=at$$

$$\int_0^{at}\frac{r^3dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}=-r^2\sqrt{a^2t^2-r^2}\ |_0^{at}\ +2\int_0^{at}\sqrt{a^2t^2-r^2}\,rdr$$

$$=-\frac{2}{3}\left(a^2t^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\ |_0^{a}=\frac{2}{3}a^3t^3$$

于是
$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi ax^2(x+y)+\frac{2}{3}\pi a^{3^3}(3x+y)\right)$$

$$=x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y)$$

即为所求的解。

4. 求二维波动方程的轴对称解（即二维波动方程的形如$u=u(r,t)$的解，$r=\sqrt{x^2+y^2}$）.

解： 解法一：利用二维波动方程柯西问题的积分表达式

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\sum_{at}^{m}}\frac{\varphi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}$$
$$+\iint_{\sum_{at}^{m}}\frac{\psi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}]`$$

由于 u 是轴对称的$u=u(r,t)$,故其始值φ,ψ只是 r 的函数，，$u=|_{t=0}=\varphi(r)$,

$u_t\ |_{t=0}=\psi(r)$,又$\sum_{at}^{m}$为圆$(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2\le a^2t^2$.记圆上任一点$p(\zeta,\eta)$的矢径为$\rho$

$\rho=\sqrt{\zeta^2+\eta^2}$ 圆心$M(x,y)$其矢径为$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 记$s=\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2}$ 则由余弦定理知，$\rho^2=r^2+s^2-2rs\cos\theta$，其中$\theta$为$oM$ 与Mp的夹角。选极坐标(s,θ)。

$$\varphi(\zeta,\ \ \eta)=\varphi(\rho)=\varphi\left(\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right)$$
$$\psi(\zeta,\eta)=\psi(\rho)=\psi\left(\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right)$$

于是以上公式可写成

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi\left(\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right)}{\sqrt{(at)^2-s^2}}sdsd\theta\right.$$

$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi\left(\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right)}{\sqrt{(at)^2-s^2}}sdsd\theta \quad \Bigg]$$

由上式右端容易看出，积分结果和(r,t)有关，因此所得的解为轴对称解，即

$$u(r,t)=\frac{1}{2\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi\sqrt{r^2+s^2+2rs\cos\theta}}{\sqrt{(at)^2-s^2}}sdsd\theta$$

$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(\sqrt{r^2+s^2-2r\cos\theta}}{\sqrt{(at)^2-s^2}}sdsd\theta]$$

解法二：作变换$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.波动方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r})$$

用分离变量法，令 u(r,t)=R(r)T(t).代入方程得

$$\begin{cases}T''+a^2\lambda t=0\\ r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}T(t)=A_\lambda\cos a\sqrt{\lambda}t+B_\lambda\sin a\sqrt{\lambda}t\\ R(r)=J_0(\sqrt{\lambda}r)\end{cases}$$

令$\sqrt{\lambda}=\mu$叠加得

$$u(r,t)=\int_0^{\infty}(A(\mu)\cos\alpha\mu t+B(\mu)\sin\alpha\mu t)J_0(\mu\gamma)du$$

5.求解下列柯西问题

$$\begin{cases}v_{tt}=a^2(v_{xx}+v_{yy})+c^2v\\ v\big|_{t=0}=\varphi(c,y),\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{t=0}=\psi(x,y)\end{cases}$$

[提示：在三维波动方程中，令 $u(x,y,z)=e^{\frac{cz}{a}}v(x,y,t)$]

解：令 $u(x,y,z,t)=e^{\frac{cz}{a}}v(x,y,t)$

则 $u_{tt}=e^{\frac{cz}{a}}v_{tt},u_{xx}=e^{\frac{cz}{a}}v_{xx},u_{yy}=e^{\frac{cz}{a}}v_{yy}$

$$u_{zz}=\frac{c^2}{a^2}e^{\frac{cz}{a}}v$$

代入原问题，得 $\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \\ u\big|_{t=0}=e^{\frac{cz}{a}}\varphi(x,y), u_t\big|_{t=0}=e^{\frac{cz}{a}}\psi(x,y) \end{cases}$

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)}{r}ds\}+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{e^{\frac{c\zeta}{a}}\psi(\xi,\eta)}{r}ds$$

$$S_{at}^M:(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=a^2t^2$$

记 S_{at}^{M+} 为上半球，S_{at}^{M-} 为下半球，$\sum_{at}^M$ 为 S_{at}^M 在 $\xi o\eta$ 平面上的投影。

$$ds=\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$,则

$$\iint_{S_{at}^M}\frac{e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)}{r}ds=\iint_{S_{at}^{M+}}\frac{1}{r}e^{\frac{c\xi}{a}}\varphi(\xi,\eta)ds+\iint_{S_{at}^{M-}}\frac{1}{r}e^{\frac{c\xi}{a}}\varphi(\xi,\eta)ds$$

$$=\iint_{\sum_{at}^M}\frac{e^{\frac{c}{a}(z+\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2})}}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+\iint_{\sum_{at}^M}\frac{e^{\frac{c}{a}(z-\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2})}}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=2e^{\frac{cz}{a}}\iint_{\sum_{at}^M}\frac{ch\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=2e^{\frac{cz}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{ch\sqrt{c^2t^2-(\frac{c}{a}r)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)rdrd\theta$$

所以 $u(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{2\pi a}e^{\frac{cz}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{ch\sqrt{c^2t^2-(\frac{c}{a}r)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+$

$r\cos\theta,y+r\sin\theta)tftf\theta\}+$

$$\frac{1}{2\pi a}e^{\frac{cz}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{ch\sqrt{c^2t^2-(\frac{c}{a}r)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)rdrd\theta$$

于是 $$v(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{ch\sqrt{c^2t^2-(\frac{c}{a}r)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+\right.$$

$$\left.+r\cos\theta,y+r\sin\theta)rdrd\theta\right\}+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{ch\sqrt{c^2t^2-(\frac{c}{a}r)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\psi(x+$$

$$+r\cos\theta,y+r\sin\theta)rdrd\theta$$

即为所求的解。

6．试用 $\varsigma 4$ 第七段中的方法导出平面齐次波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$$

在齐次初始条件

$$u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=0$$

下的求解公式。

解：首先证明齐次化原理：若 $w(x,y,t,\tau)$ 是定解问题

$$\begin{cases}w_{tt}=a^2(w_{xx}+w_{yy})\\ w\big|_{t=o}=0,w_{t=\tau}f(x,y,\tau)\end{cases}$$

的解，则 $u(x,y,t)=\int_0^t w(x,y,t,\tau)d\tau$ 即为定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)\\ u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解。

显然，$u\big|_{t=0}=0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=w(x,y,t,\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}d\tau=\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}d\tau$$

（ $w\big|_{t=\tau}=0$ ）.所以 $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0$

又 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}d\tau$$

$$= f(x,y,t)+\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}d\tau$$

因为 w 满足齐次方程，故 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}= f(x,y,t)+a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^{2u}}{\partial y^2})$$

齐次化原理得证。由齐次方程柯西问题解的泊松公式知

$$w(x,y,t,\tau)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{\sum_{a(t-\tau)}^M}\frac{f(\zeta,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta$$

所以

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}rdrd\theta$$

即为所求的解。

所以 $u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}rdrd\theta d\tau$

7．用降维法来解决上面的问题

解：推迟势

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\le at}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}dv$$

其中积分是在以 (x,y,z) 为中心，at 为半径的球体中进行。它是柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t)\\ u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解。对于二维问题 u ，f 皆与 z 无关，故

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint_{S_r^{M-}}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}dsdr$$

其中 s_r^M 为以 $M(x,y,0)$ 为中心 r 为半径的球面，即

$$S_r^M:(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta^2=r^2$$

$$ds=\frac{r}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

$$\int\int_{S_r^M} \frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}ds = \int\int_{S_r^{M+}} \frac{f(\xi,\mu,t-\frac{r}{a})}{r}ds + \int\int_{S_r^{M-}} \frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}ds$$

$$= 2\iint_{\sum_r^M} \frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta$$

其中 s_r^{M+}, s_r^{M-} 分别表示 s_r^M 的上半球面与下半球面，$\sum_r^M$ 表示 s_r^M 在 $\xi o\eta$ 平面上的投影。

所以 $$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\iint_{\Sigma_{rM}} \frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\left\{\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{f(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta, t-\frac{r}{a})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta\right\}dr$$

在最外一层积分中，作变量置换，令 $t-\frac{r}{a}=\tau$，即 $r=a(t-\tau), dr=-ad\tau$，当 $r=0$ 时 $\tau=t$，当 $r=at$ 时，$\tau=0$，得

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta d\tau$$

即为所求，与 6 题结果一致。

8. 非齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 2(y-t) \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x^2+yz \end{cases}$$

解：由解的公式得

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M} \frac{\psi}{r}ds + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\le at} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r}dV \qquad (a=1)$$

计算

$$\iint_{S_t^M} \frac{\psi}{r}ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(x+r\sin\theta\cos\varphi)^2+(y+r\sin\theta\sin\varphi)(z+r\cos\theta)]\cdot$$

$$\cdot r\sin\theta d\theta d\varphi\Big|_{r=t} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(x^2+yz+2xr\sin\theta\cos\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$$

$$+yr\cos\theta+zr\sin\theta\sin\varphi+r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)r\sin\theta d\theta d\varphi\Big|_{r=t}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi, \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi, \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi = 0, \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi d\theta d\varphi = 0.$$

所以 $$\iint_{S_t^M}\frac{\psi}{r}ds = 4\pi t(x^2+yz)+\frac{4}{3}\pi t^3$$

计算 $$\iiint_{r\le t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-r)}{r}dV = \iiint_{r\le t}\frac{2(y+r\sin\theta\sin\varphi-t+r)}{r}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=2\int_0^t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(y+r\sin\theta\sin\varphi-t+r)r\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=4\pi\int_0^t\int_0^{\pi}(y-t+r)r\sin\theta drd\theta$$

$$=8\pi\left(\frac{1}{2}(y-t)r^2+\frac{r^3}{3}\right)_0^t = 4\pi yt^2-\frac{4}{3}\pi t^3.$$

所以 $$u(x,y,z,t)=t(x^2+yz)+\frac{1}{3}t^3+yt^2-\frac{1}{3}t^3$$

$$=t(x^2+yz+yt)$$

即为所求的解。

§5　能量不等式，波动方程解的唯一和稳定性

1．设受摩擦力作用的固定端点的有界弦振动，满足方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t$$

证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f$$

的混合问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性。

证：1°　首先证明能量是减少。

能量 $$E(t)=\int_0^l(u_t^2+a^2u_x^2)dx$$

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l(2u_tu_{tt}+2a^2u_xu_{xt})dx$$

$$=2\int_0^l u_tu_{tt}dx+2a^2[u_xu_t\Big|_0^l-\int_0^l u_tu_{xx}dx]$$

$$=2\int_0^l u_t(u_{tt}-a^2u_{xx})dx+2a^2u_xu_t\Big|_0^l$$

因弦的两端固定， $u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0,$ 所以

$$u_t|_{x=0}=0, u_t|_{x=l}=0$$

于是 $$\frac{dE(t)}{dt}=2\int_0^l u_t(u_{tt}-a^2u_{xx})dx$$

$$=-2c\int_0^l u_t^2dx<0 \quad (\because c>0)$$

因此，随着 t 的增加， $E(t)$ 是减少的。

2. 证明混合问题解的唯一性

混合问题:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f\\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

设 u_1,u_2 是以上问题的解。令 $u=u_1-u_2,$ 则 u 满足

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t\\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

能量 $$E(t)=\int_0^l(u_t^2+a^2u_x^2)dx$$

当 $t=0,$ 利用初始条件有 $u_t|_{t=0}=0,$ 由 $u|_{t=0}=0,$ 得

$$u_x|_{t=0}=0$$

所以 $$E(0)=0$$

又 $E(t)$ 是减少的，故当 $t>0, E(t)\le E(0)=0,$ 又由 $E(t)$ 的表达式知 $E(t)\ge 0,$

所以

$$E(t)\equiv 0$$

由此得 $u_t\equiv 0,$ 及 $u_x\equiv 0,$ 于是得到

$$u\equiv \text{常量}$$

再由初始条件 $u|_{t=0}=0,$ 得 $u\equiv 0,$ 因此 $u_1\equiv u_{2,}$ 即混合问题解的唯一的。

3˙ 证明解关于初始条件的稳定性，即对任何 $\varepsilon.>0,$ 可以找到 $\eta>0,$ 只要初始条件之差

$\varphi_1-\varphi_2,\psi_1-\psi_2$ 满足

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}<\eta,\|\varphi_{1x}-\varphi_{2x}\|_{L^2}<\eta,\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2}<\eta$$

则始值 (φ_1,ψ_1) 所对应的解 u_1 及 $(\varphi_2-\psi_2)$ 所对应的解 u_2 之差 u_1-u_2 满足

$$\|u_1-u_2\|_{L^2}<\varepsilon$$

或
$$\sqrt{\int_0^T\int_0^l (u_1-u_2)^2\,dxdt}<\varepsilon$$

令
$$E_0(t)=\int_0^l u^2(x,t)dx$$

$$\frac{dE_0(t)}{dt}=2\int_0^l u\cdot u_t dx\le\int_0^l u^2dx+\int_0^l u_t^2dx$$

$$\le E_0(t)+E(t)$$

即
$$\frac{d}{dt}(e^{-t}E_0(t)\le e^{-t}E(t)$$

积分得
$$E_0(t)\le e^tE_0(0)+e^t\int_0^t e^{-\tau}E(\tau)d\tau$$

又 $E(\tau)\le E(0)$,所以
$$E_0(t)\le e^tE_0(0)+e^tE_0(0)\int_0^t e^{-\tau}d\tau$$

即
$$E_0(t)\le e^tE_0(t)+(e^t-1)E(0)$$

记 $\tilde{\varphi}=\varphi_1-\varphi_2,\tilde{\psi}=\psi_1-\psi_2$，则 $\tilde{u}=u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=t} = 0 \\ u|_{t=0} = \tilde{\varphi}, u_t|_{t=0} = \tilde{\psi} \end{cases}$$

则相对应地有 $E_0(0) = \int_0^l \tilde{\varphi}^2 dx$

$$E(0) = \int (\tilde{\psi}^2 + a^2 \tilde{\varphi}_{x^2}) dx$$

故若 $\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} = \left(\int_0^l \tilde{\varphi}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \eta \quad \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} = \left(\int_0^l \tilde{\varphi}_{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} < \eta$

$$\|\tilde{\psi}\|_{L^2} = \left(\int_0^l \tilde{\psi}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \eta$$

则 $E_0(0) < \eta^2, E(0) < (1 + a^2)\eta^2$

于是 $\|u\|^2{}_{L^2} = E_0(t) > \left[e^t + (e^t - 1)(1 + a^2) \right]\eta^2 < \varepsilon^2$ (对任何 t)

即 $\|u\|_{L^2} < \varepsilon$

或 $\left(\int_0^T \int_0^l u^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \eta \left(\int_0^T \left[e^t + (e^t - 1)(1 + a^2) \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon'$

4° 解关于自由的稳定性

设 $u_1(x,t)$ 满足 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f_1 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi, u_t|_{t=0} = \psi \end{cases}$

$u_2(x,t)$ 满足 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f_2 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u_{t=0} = \varphi, u_t|_{t=0} = \psi \end{cases}$

则 $u = u_1 - u_2$ 满足 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + (f_1 - f_2) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

今建立有外力作用时的量不等式(记 $f = f_1 - f_2$)

$$E(t)=\int_0^l\left(u_t{}^2+a^2u_x{}^2\right)dx$$

$$\frac{dE(t)}{dt}=2\int_0^l\left(u_tu_{tt}+a^2u_xu_{xt}\right)dx$$

$$=2\int_0^l u_t\left(u_{tt}-a^2u_{xx}\right)dx$$

$$=2\int_0^l\left(-cu_t{}^2+u_tf\right)dx\quad\left(\because u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f\right)$$

$$\le 2\int_0^l u_tfdx\le\int_0^l u_t{}^2dx+\int_0^l f^2dx\le E(t)+F(t)$$

其中 $F(t)=\int_0^l f^2dx$, 故

$$E(t)\le E(0)e^t+e^t\int_0^t e^{-t}F(\tau)d\tau$$

又 $E(0)=0$ (由始值), 所以

$$E(t)\le e^t\int_0^t e^{-\tau}F(\tau)d\tau=e^t\int_0^t e^{-\tau}d\tau\int_0^l f^2dx$$

$$\le e^t\int_0^T\int_0^t f^2dxdt=K^2e^t$$

由 3° 中证明, 知

$$E_0(t)\le e^tE_0(0)+e^t\int_0^t e^{-\tau}E(\tau)d\tau$$

而 $E_0(0)=0$(由始值) 故

$$E_0(t)=e^t\int_0^t e^{-\tau}E(\tau`)d\tau\le e^t\int_0^t K^2d\tau=te^tK^2$$

$$\int_0^T E_0(t)dt=\int_0^T K^2te^tdt=K^2\left[(T-1)e^T+1\right]$$

因此，当 $K=\sqrt{\int_0^T\int_0^l f^2dxdt}<\eta$,则

$$\sqrt{\int_0^T\int_0^l {u_0}^2dxdt}<\eta\sqrt{(T-1)e^T+1}<\varepsilon$$

亦即当 $\sqrt{\int_0^T\int_0^l(f_1-f_2)^2dxdt}<\eta$，则 $\sqrt{\int_0^T\int_0^l(u_1-u_2)^2 dxdt}<\varepsilon$。即解关于自由项是稳定的。

2．证明如果函数 $f(x,t)$ 在 G：$0\le x\le l$，$0\le t\le T$ 作微小改变时，方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu+f(x,t)$$

（$k(x)>0$，$q>0$ 和 $f(x.t)$ 都是一些充分光滑的函数）满足固定端点边界条件的混合问题的解在 G 内的改变也是很微小的。

证：只须证明，当 f 很小时，则问题 $\begin{cases}u_{tt}=(k(x)u_x)_x-qu+f\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解 u 也很小（按绝对值）。

考虑能量 $$E(t)=\int_0^l({u_t}^2+k(x){u_x}^2+qu^2)dx$$

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l(2u_tu_{tt}+2k(x)u_xu_{xt}+2quu_t)dx$$

$$=2\int_0^l u_tu_{tt}dx+\left\{2k(x)u_xu_t\Big|_0^l-2\int_0^l u_t(k(x)u_x)_xdx\right\}+\int_0^l quu_tdx$$

由边界条件 $u|_{x=0}=0$，$u_t|_{x=l}=0$，故 $u_t|_{x=0}=0$，$u_l|_{x=l}=0$。

所以

$$\frac{dE(t)}{dt}=2\int_0^l u_t(u_{tt}-(k(x)u_x)_x+qu)dx=2\int_0^l u_t\cdot f(x,t)dx\le\int_0^l {u_t}^2dx+\int_0^l f^2dx$$

又由于 $k(x)>0$，$q>0$，故 $\int_0^l {u_t}^2dx\le E(t)$，即

$$\frac{dE(t)}{dt}\le E(t)+\int_0^l f^2dx$$

或 $$\frac{d}{dt}(E(t)e^{-1}) \le e^{-t}\int_0^l f^2 dx$$

记 $$F(t)=\int_0^l f^2 dx$$

得 $$E(t) \le E(0)e^t + \int_0^l e^{t-\tau}F(\tau)d\tau$$

由初始条件 $u|_{t=0}=0$，$u_t|_{t=0}=0$，

又因 $u|_{t=0}=0$，得 $u_x|_{t=0}=0$，故 $E(0)=0$，即 $E(t)\le\int_0^l e^{t-\tau}F(\tau)d\tau$

若 f 很小，即 $|f|<\eta$，则 $f^2<\eta^2$，故 $F(t)\le\int_0^l \eta^2 d\tau=\eta^2 l$

$$E(t)\le\eta^2 l\int_0^l e^{t-\tau}d\tau=\eta^2 l(e^t-1) < \eta^2 l(e^T-1)=\varepsilon^2$$

即在 $[0.T]$ 中任一时刻 t，当 $|f|$ 很小时，$E(t)<\varepsilon^2$，又 $E(t)$ 中积分号下每一项皆为非负的，故

$\int_0^l k(x){u_x}^2 dx<\varepsilon^2$ （对 $[0,T]$ 中任一时刻 t ）今对 $0<x<l$，$0<t<T$，

估计 $|u(x,t)|$。

因为 $|u(x,t)-u(0,t)|=\left|\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}dx\right|\le\int_0^x\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx\le\int_0^l\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx$，应用布尼亚科夫斯基不等式，

可以得到 $$\int_0^l\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx=\int_0^l\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\sqrt{k(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx\le\left\{\int_0^l k(x)^{-1}dx\int_0^l k(x){u_x}^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}<K\varepsilon$$

其中 $K^2=\int_0^l k(x)^{-1}dx$（因 $k(x)>0$ 且充分光滑）

即 $$|u(x,t)-u(0,t)|\le K\cdot\varepsilon$$

又由边界条件 $u(0.t)=0$，得 $|u(x,t)|\le K\cdot\varepsilon$

即当 $0<x<l$，$0<t<T$，有 $|u(x,t)|$ 很小，得证。

3．证明波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$$

的自由项 f 中在 $L^2(K)$ 意义下作微小改变时，对应的柯西问题的解 u 在 $L^2(K)$ 意义之下改变也是微小的。

证：研究过 $(x_0,y_0,\frac{R}{a})$ 的特征锥 K

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le(R-at)^2$$

令 $t=t$ 截 K，得截面 Ω_t，在 Ω_t 上研究能量：

$$E(\Omega_t)=\iint_{\Omega_t}[u_t{}^2+a^2(u_x{}^2+u_y{}^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}[u_t{}^2+a^2(u_x{}^2+u_y{}^2)]dsdr\qquad(r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\frac{dE(\Omega_t)}{dt}=2\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}[u_tu_{tt}+a^2(u_xu_{xt}+u_yu_{yt})]dsdt-a\int_{\Gamma_t}[u_t{}^2+a^2(u_x{}^2+u_y{}^2)]ds$$

其中 Γ_t 为 Ω_t 的边界曲线。再利用奥氏公式，得

$$\frac{dE(\Omega_t)}{dt}=2\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}u_t[u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})]dsdt$$

$$+2\int_{\Gamma_t}\left\{a^2[u_xu_t\cos(n,x)+u_yu_t\cos(n,y)]-\frac{a}{2}[u_t{}^2+a^2(u_x{}^2+u_y{}^2)]\right\}ds$$

$$=2\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}u_tf(x,y,.t)dsdr-a\int_{\Omega_t}[(au_x-u_t\cos(n,x))^2+(au_y-u_t\cos(n,y))^2]ds$$

因为第二项是非正的，故

$$\frac{dE(t)}{dt}\le2\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}u_tfdsdr\le\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}u_t{}^2dsdr+\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r}f^2dsdr$$

所以 $$\frac{dE(t)}{d\Omega_t}\le E(\Omega_t)+\iint_{\Omega_t}f^2dxdy$$

令 $$F(t)=\iint_{\Omega_t} f^2 dxdy$$

上式可写成 $$\frac{d}{dt}(e^{-t}E(\Omega_t))\le e^{-t}F(t)$$

即 $$E(\Omega_t)\le E(\Omega_0)e^t+\int_0^t e^{t-\tau}F(\tau)d\tau$$

$$\le E(\Omega_0)e^t+e^t\int_0^t\iint_{\Omega_\tau} f^2 dxdyd\tau$$

$$\le E(\Omega_0)e^t+e^t\int_0^{\frac{R}{a}}\iint_{\Omega_\tau} f^2 dxdydt$$

即 $$E(\Omega_t)\le E(\Omega_0)e^t+e^t\iiint_K f^2 dxdydt$$

研究 $$E_0(\Omega_t)=\iint_{\Omega_t} u^2(x,y,t)dxdy$$

$$\frac{dE_0(\Omega_t)}{dt}=2\iint_{\Omega_t} uu_1 dxdy-a\int_{\Gamma_t} u^2 ds$$

$$\le 2\iint_{\Omega_t} uu_1 dxdy\le\iint_{\Omega_t} u^2 dxdy+\iint_{\Omega_t} u_t^2 dxdy$$

$$\le E_0(\Omega_t)+E(\Omega_t)$$

所以 $$E_0(\Omega_t)\le E_0(\Omega_0)e^t+\int_0^t e^{t-\tau}E(\Omega_0)d\tau$$

$$\le E_0(\Omega_0)e^t+\int_0^t e^t E(\Omega_0)d\tau+\int_0^t e^t\left(\iiint_K f^2 dxdydt\right)d\tau$$

$$=E_0(\Omega_0)e^t+te^tE(\Omega_0)+te^t\iiint_K f^2 dxdydt$$

为证明柯西问题的解的关于自由项的稳定性，只须证明柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)\\ u\big|_{t=0}=0,\qquad u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

当$\|f\|_{L^2(K)}=\left(\iiint\limits_K f^2dxdydt\right)^{1/2}$“很小”时，则解$u$的模$\|u\|_{L^2(K)}$也“很小”

此时，由始值$u_t\big|_{t-0}=0$，而由于$u\big|_{t=0}=0$得

$$u_x\big|_{t=0}=0,\qquad u_y\big|_{t=0}=0$$

所以

$$E(\Omega_0)=0,\qquad E_0(\Omega_0)=0\text{，即}$$

$$E_0(\Omega_t)\le te^t\iiint\limits_K f^2dxdydt=te^t\|f\|^2_{L^2(K)}$$

$$\|u\|^2_{L^2(K)}=\int_0^{\frac{R}{a}}E_0(\Omega_t)dt\le\|f\|^2_{L^2(K)}\int_0^{\frac{R}{a}}te^tdt$$

$$=\|f\|^2_{L^2(K)}\left(\frac{R}{a}e^{\frac{R}{a}}-e^{\frac{R}{a}}\right)=M^2\|f\|^2_{L^2(K)}$$

故任给$\varepsilon>0$，当$\|f\|^2_{L^2(K)}<\dfrac{\varepsilon}{M}$，则$\|u\|_{L^2(K)}<\varepsilon$得证

4．固定端点有界弦的自由振动可以分解成各种不同固有频率的驻波(谐 波)的迭加。试计算各个驻波的动能和位能，并证明弦振动的总能量等于各个驻波能量的迭加。这个物理性质对应的数学事实是什么？

解：固定端点有界弦的自由振动，其解为

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

每一个u_n是一个驻波，将u_n的总能量记作E_n，位能记作V_n，动能记作K_n，则

$$V_n=\int_0^l a^2u_{nx}^2dx=a^2\int_0^l\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$K_n=\int_0^l u_{nt}^2dx=\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\int_0^l\left(-A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)^2\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\left(-A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

总能量 $$E_n=V_n+K_n=\frac{(an\pi)^2}{2l}\left(A_n^2+B_n^2\right)$$

由此知 E_n 与 t 无关，即能量守恒，$E_n(t)=E_n(0)$。

现在计算弦振动的总能量，由于自由振动能量守恒，故总能量 $E(t)$ 亦满足守恒定律，即

$$E(t)=\int_0^l\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx=E(0)$$

即 $$E(t)=\int_0^l\left[u_t^2+a^2u_x^2\right]_{t=0}dx$$

又由分离变量法，A_n、B_n 由始值决定，且

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x, u_t|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所以 $$\int_0^l u_t{}^2\Big|_{t=0}dx=\int_0^l(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x)\cdot(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x)dx$$

利用 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 在 $[0,l]$ 上的正交性，得

$$\int_0^l u_t{}^2\Big|_{t=0}dx=\int_0^l(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{an\pi}{l})^2B_n{}^2\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an\pi)^2}{2l}B_n{}^2$$

同理 $$\int_0^l u_x^2\Big|_{t=0}dx=\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\pi}{l}A_m\cos\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\pi)^2}{2l}A_n^2$$

所以 $$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an\pi)^2}{2l}\left(A_n^2+B_n^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\text{。}$$

即总能量等于各个驻波能量之和。

这个物理性质所对应的数学意义说明线性齐次方程在齐次边界知件下，不仅解 u 具有可加性，而且 $\int_0^l u_t^2dx$ 及 $\int_0^l u_x^2dx$ 仍具有可加性。这是由于 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 的正交性所决定的。

5.在 $\varphi\in c^2,\psi\in c^2$ 的情况下，证明定理 5，即证明此时波动方程柯西问题存在着唯一

的广义解，并且它在证理 4 的意义下是稳定的。

证：我们知道当$\varphi \in c^3, \psi \in c^2$，则波动方程柯西问题的古典解唯一存在，且在$L^2(K)$意义下关于初始条件使稳定的（定理 3、4）

今$\varphi \in c^2, \psi \in c^1$，根据维尔斯特拉斯定理，存在$\{\varphi_n\} \in c^3, \{\psi_n\} \in c^2$，当$n \to \infty$时$\varphi_n$及其一阶偏导数$\varphi_{nx}, \varphi_{ny}$分别一致收敛于$\varphi, \varphi_x$及$\varphi_y, \psi_n$一致收敛于$\psi$。

记：φ_n, ψ_n为初始条件的柯西问题的古典解为u_n，则u_n二阶连续可微，且在$L^2(K)$意义下u_n关于φ_n, ψ_n是稳定的。$\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$为一致连续序列，自然在$L^2$（$\Omega_0$）（$\Omega_0$：特征锥 K 与$t=0$相交截出的圆）意义下为一基本列，即$m, n > N$时

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\Omega_0)} < \eta \ , \qquad \|\varphi_{mx} - \varphi_{nx}\|_{L^2(\Omega_0)} < \eta$$

$$\|\varphi_{my} - \varphi_{ny}\|_{L^2(\Omega_0)} < \eta \ , \qquad \|\psi_m - \psi_n\|_{L^2(\Omega_0)} < \eta$$

根据$\{u_n\}$的稳定性，得

$$\|u_m - u_n\|_{L^2(K)} = \left(\iiint_K (u_m - u_n)^2 dxdydt\right)^{\frac{\eta}{2}} < \varepsilon$$

即$\{u_n\}$在$L^2(K)$意义下为一基本列，根据黎斯—弗歇尔定理，存在唯一的函数u,使当$n \to \infty$时

$$\|u - u_n\|_{L^2(K)} \to 0$$

u即为对应于初始条件φ, ψ的柯西问题的广义解。

现在证明广义解的唯一性。

若另有$\{\overline{\varphi}_n\} \in c^3, \{\overline{\psi}_n\} \in c^2$，当$n \to \infty$时$\overline{\varphi}_n \to \varphi, \overline{\varphi}_{nx} \to \varphi_x, \overline{\varphi}_{ny} \to \varphi_y$且$\overline{\psi}_n \to \psi$是一致的，其所对应的古典解$\overline{u_n} \to u$(按$L^2(K)$)，现在$\overline{u} = u$，用反证法，

若$\overline{u} \neq u$，研究序列

$$\varphi_1, \overline{\varphi}_1, \varphi_2, \overline{\varphi}_2, \cdots \varphi_n, \overline{\varphi}_n, \cdots \qquad (1)$$

$$\psi_1, \overline{\psi}_1, \psi_2, \overline{\psi}_2, \cdots \psi_n, \overline{\psi}_n, \cdots \qquad (2)$$

则序列(1)及其对x和y的偏导数仍分别一致收敛于$\varphi, \varphi_x, \varphi_y$，序列(2)仍为一致收敛于$\psi$，利用古典解关于初始条件的稳定性，序列（1）(2)所对应的古典解序列

$$u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \cdots, u_n, \bar{u}_n, \cdots$$

根据黎期弗歇尔定理，按$L^2(L)$意义收敛于唯一的极限函数。与$\bar{u} \neq u$矛盾。故以上所定义的广义解是唯一的。

若$\varphi_1 \in c^2, \psi_1 \in c^1$，所对应的广义解记作$u_1$又$\varphi_2 \in c^2, \psi_2 \in c^1$所对应的广义解记作$u_2$，即存在$\{\varphi_{1n}\} \in c^3, \{\psi_{1n}\} \in c^2, \{\varphi_{2n}\} \in c^3, \{\psi_{2n}\} \in c^2$。分别一致收敛于$\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}$则$\varphi_{1n}, \psi_{1n}$，所对应的古典解$u_1$按$L^2(K)$意义收敛于$u_1 \varphi_{2n}, \psi_{2n}$所对应的古典解$u_{2n}$按$L^2(K)$意义收敛于$u_2$

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = \iiint_K (u_1 - u_2)^2 dxdydt$$

$$= \iiint_K [(u_1 - u_{1n}) + (u_{1n} - u_{2n}) + (u_{2n} - u_2)]^2 dxdydt$$

$$= \iiint_K [(u_1 - u_{1n})^2 + (u_{1n} - u_{2n})^2 + (u_{2n} - u_2)^2 + 2(u_1 - u_{1n})(u_{1n} - u_{2n})$$

$$+ 2(u_1 - u_{1n})(u_{2n} - u_2) + 2(u_{1n} - u_{2n})(u_{2n} - u_2)]dxdydt$$

$$\leq 3\iiint_K [(u_1 - u_{1n})^2 + (u_{1n} - u_{2n})^2 + (u_{2n} - u_2)^2]dxdydt$$

$$= 3[\|u_1 - u_{1n}\|^2 L^2 + \|u_{1n} - u_{2n}\|^2 L^2 + \|u_{2n} - u_2\|^2 L^2] \quad (3)$$

若

$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon, \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon, \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon, \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon$。

则

$$\|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}\|_{L^2(\Omega_0)} = \iint_{\Omega_0} (\varphi_{1n} - \varphi_{2n})^2 dxdy$$

$$= \iint_{\Omega_0} [(\varphi_{1n} - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_{2n})]^2 dxdy$$

$$\leq 3\iint_{\Omega_0} [(\varphi_{1n} - \varphi_1)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_{2n})^2]dxdy$$

$$=3[\|\varphi_{1n} - \varphi_1\|^2{}_{L^2(\Omega_0)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2{}_{L^2(\Omega_0)} + \|\varphi_2 - \varphi_{2n}\|^2{}_{L^2(\Omega_0)}]$$

因$\varphi_{1n} \to \varphi_1$，$\varphi_{2n} \to \varphi_2$，故当$n > N$有$\|\varphi_{1n} - \varphi_1\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon$，$\|\varphi_{2n} - \varphi_2\|_{L^2(\Omega_0)} < \varepsilon$

所以$\|\varphi_{1n}-\varphi_{2n}\|^2{}_{L^2(\Omega_0)}<9\varepsilon^2$即$\|\varphi_{1n}-\varphi_{2n}\|_{L^2(\Omega_0)}<3\varepsilon$

同 理 有 $\|\varphi_{1nx}-\varphi_{2nx}\|_{L^2(\Omega_0)}<3\varepsilon$ ， $\|\varphi_{1ny}-\varphi_{2ny}\|_{L^2(\Omega_0)}<3\varepsilon$ ，

$\|\psi_{1n}-\psi_{2n}\|_{L^2(\Omega_0)}<3\varepsilon$

由古典解的稳定性，得$\|u_{1n}-u_{2n}\|_{L^2(K)}<\varepsilon'$。（当$n>N$）又由广义解的定义知，对$\varepsilon'>0$，当$n>N'$有

$$\|u_1-u_{1n}\|_{L^2(K)}<\varepsilon'，\|u_2-u_{2n}\|_{L^2(K)}<\varepsilon'$$

故当$n>\max(N,N')$时，由（3）式有

$$\|u_1-u_2\|_{L^2(K)}<3\varepsilon'$$

即广义解对于初始条件是稳定的。

6．对弦振动方程的柯西问题建立广义解的定义，并证明在$\varphi(x)$为连续，$\psi(x)$为可积的情形，广义解仍然可以用达朗贝尔公式来给出，因而是连续函数。

解：由达朗贝尔公式知，当$\varphi(x)\in c^2,\psi(x)\in c^1$时

则柯西问题 $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

有古典解$u\in c^2$.且u关于φ,ψ是稳定的。

现在按以下方法来定义广义解。

给出一对初始函数$e=(\varphi,\psi),\varphi\in c^2,\psi\in c^1$可以唯的确定一个$u$。函数对$e=(\varphi,\psi)$的全体构成一个空间$\Phi$，它的元素的模按以下方式来定义，记$(x,t)$的依赖区域为$X:x-at\le x'\le c+at$，记$K$为区域：$x-at\le x'\le c+at,0\le t'\le t$，则$u$在$K$上的值仅依赖于$X$上函数对$(\varphi,\psi)$的值。今定义

$$\|e\|_\Phi=\max(\|\varphi\|_{L^2(X)},\|\psi\|_{L^2(X)})$$

则Φ构成一个线性赋范空间，其中任意两个元素

$$e_1=(\varphi_1,\psi_1)，\quad e_2=(\varphi_2,\psi_2)$$

的距离为 $r(e_1,e_2)=\max(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(X)},\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2(X)})$

Φ中任一元素对应一个解u是K中二阶连续可微函数，它的全体也构成一个函数空间，记为ψ，其模定义为$\|u\|_{L^2(K)}$，二元素u_1,u_2的距离为$\|u_1-u_2\|_{L^2(K)}$则(φ,ψ)与u的关系可以

看成Φ到ψ的一个映象，且根据u关于(φ,ψ)的稳定性知，映象是连续的。

现将Φ完备化，考虑Φ中任一基本列$\{e\}=\{\varphi_n,\psi_n\}$，满足$r(e_n,e_m)\to 0$，则$\{\varphi_n\},\{\psi_n\}$在$X$中按$L^2(X)$模成为基本列，由黎斯—弗歇尔定理，存在着极限元素$e=\{\varphi_n,\psi_n\}$即$\|\varphi_n-\varphi\|_{L^2(X)}\to 0,\|\psi_n-\psi\|_{L^2(X)}\to 0$将$e$添入$\Phi$且定义$e=\{\varphi_n,\psi_n\}$的模为

$$\|e\|_\Phi=\lim_{n\to\infty}\|e_n\|_\Phi$$

则Φ为一完备空间

又$\{e_n\}$为基本列，则所对应的$\{u_n\}$也是一个$L^2(K)$中的基本列（稳定性），再根据黎斯—弗歇尔定理，存在着唯一的极限元素$u\in L^2(K)$，u就称为对应于初始条件$e=\{\varphi_n,\psi_n\}$的弦振动方程柯西问题的广义解。

若$\varphi(x)$连续，则存在$\varphi_n(x)\in c^2$且$\varphi_n(x)$一致收敛于$\varphi(x)$，又$\psi(x)$可积则必L可积，因此对任意的$\varepsilon>0$存在连续函数$\psi_0(x)$，使得

$$\int_X|\psi(x)-\psi_0(x)|dx<\varepsilon$$

又
$$\left|\int_X\psi(x)dx-\int_X\psi_0(x)\right|\le\int_X|\psi(x)-\psi_0(x)|dx<\varepsilon$$

再由维尔斯特拉斯定理知存在$\psi_n(x)\in c^1$，当$n\to\infty$时一致收敛于$\psi_0(x)$，即任给$\varepsilon'>0$，当$n>N(\varepsilon')$时

$$|\psi_n(x)-\psi_0(x)|<\varepsilon$$

于是
$$\int_X|\psi_n(x)-\psi(x)|dx\le\int_X|\psi_n(x)-\psi_0(x)|dx+\int_X|\psi_0(x)-\psi(x)|dx$$
$$<\varepsilon'\cdot M+\varepsilon=\varepsilon''$$

当$n>N(\varepsilon')$

即当$n>N(\varepsilon'')$时

$$\left|\int_X\psi_n(x)dx-\int_X\psi(x)dx\right|<\int_X|\psi_n(x)-\psi(x)|dx<\varepsilon$$

亦即$\int_X\varphi_n(x)dx$收敛于$\int_X\varphi(x)dx$。

对于$\varphi_n(x)\in c^2$，$\varphi_n(x)\in c^1$，由达朗贝尔公式得，

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi_n(x+at)+\varphi_n(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_n(\alpha)d\alpha$$

令$n\to\infty$， 由于$\varphi_n\to\varphi,\int_X\varphi_n(\partial)d\partial=\int_{x-at}^{x+at}\varphi_n(\alpha)d\alpha\to\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)d\alpha$，则$u_n(x,t)$是收敛的， 记其极限函数为$u(x,t)$，得广义解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)d\alpha$$

又$\varphi(x)$连续。$\varphi(x)$可积，则$\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)d\alpha$也连续，故$u(x,t)$为连续函数。即得所证。